E.N.S. FONTENAY & SAINT-CLOUD 1979

Option "Sciences physiques" (P')

DURÉE : 4 heures

MATHEMATIQUES II

On considère l'ensemble E des fonctions bornées, définies sur $\mathbb{R}$, *nulles en dehors d'un intervalle fermé borné* et de valeur absolue intégrable sur cet intervalle.

I

Soient f et g deux fonctions de E, respectivement nulles à l'extérieur des intervalles de la droite réelle : $[a, b]$ et $[c, d]$. On désigne par $f * g$ la fonction qui à tout point x de la droite réelle $\mathbb{R}$ associe :

$$f * g\,(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x - y)\, dy .$$

(On remarquera que cette intégrale se ramène à une intégrale sur un intervalle fini.)

1° Montrer que la fonction $f * g$ est nulle en dehors de l'intervalle $]c + a,\ d + b[$.

2° Montrer que $f * g = g * f$.

3° Calculer $f * g$ lorsque f et g sont respectivement les fonctions caractéristiques des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$.

Tracer la courbe représentative de cette fonction dans les deux cas qui se présentent.

(On rappelle que f est fonction caractéristique de l'intervalle $[a, b]$ si $f(x) = 1$ pour $x \in [a, b]$, et $f(x) = 0$ pour $x \notin [a, b]$.)

.../...

II

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $f \in E$, on définit la fonction Tf par :

$$Tf(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f(x)\, dx.$$

1° *a.* Pour $u \in [\alpha, \beta]$, α et β réels, montrer qu'il existe une constante M ne dépendant que de α et β telle que :

$$|e^u - 1 - u| \leqslant M\, u^2.$$

b. En utilisant la question *a.* précédente, démontrer que Tf admet pour dérivée première la fonction $(Tf)'$ définie par :

$$(Tf)'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} -x\, e^{-tx} f(x)\, dx,$$

et pour dérivée seconde la fonction $(Tf)''$ définie par :

$$(Tf)''(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, e^{-tx} f(x)\, dx.$$

2° *a.* Lorsque f et g sont des fonctions caractéristiques d'intervalles, calculer Tf, Tg, $T[f * g]$.

b. Lorsque f et g sont des sommes finies de fonctions caractéristiques d'intervalles, montrer que :

$$T[f * g] = Tf \,.\, Tg.$$

On admettra que cette propriété est vraie pour toutes fonctions f et g de E.

3° On suppose, *dans cette question,* que la fonction f satisfait à la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1.$$

On définit par récurrence les fonctions :

$$f^{n*} = f * f^{n-1*} \quad \text{pour} \quad n > 1 \quad \text{avec} \quad f^{1*} = f.$$

a. On pose :

$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f^{n*}(x)\, dx \quad \text{et} \quad v_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f^{n*}(x)\, dx - m_n^2.$$

En utilisant II, 1° et 2°, vérifier que $m_n = n m_1$ et $v_n = n v_1$.

b. On pose : $k_n(x) = n f^{n*}(nx)$.

Montrer que $Tk_n(t) = \left[Tf\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$. En déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la limite de $Tk_n(t)$ quand n tend vers l'infini.

c. On pose : $h_n(x) = \sqrt{n}\, f^{n*}(\sqrt{n}\, x)$.

Dans le cas où $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = 0$, calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$ la limite de $Th_n(t)$ quand n tend vers l'infini.

III

Dans cette partie, g est une fonction de E positive et nulle en dehors de l'intervalle $[-1, +1]$. On définit la suite de fonctions g_n par :

$$g_n(x) = \frac{n\, g(nx)}{\int_{-1}^{+1} g(y)\, dy}$$

1° On suppose dans cette question que $f \in E$ et f continue au point x_0, $x_0 \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

$$\lim_{n \to \infty} [g_n * f](x_0) = f(x_0).$$

2° On suppose maintenant que $f \in E$ et, qu'au point x_0, f admet une limite à droite : $f(x_0 +)$ et une limite à gauche : $f(x_0 -)$. Démontrer que :

$$\lim_{n \to \infty} [g_n * f](x_0) = f(x_0 +) \frac{\int_{-1}^{0} g(y)\, dy}{\int_{-1}^{1} g(y)\, dy} + f(x_0 -) \frac{\int_{0}^{1} g(y)\, dy}{\int_{-1}^{1} g(y)\, dy}$$

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail